Über die Feldgleichungen der Gravitation bei variabler „Gravitationskonstante“

Von Pascual Jordan und Claus Müller

(Z. Naturforschg. 2a, 1—2 [1947]; eingegangen am 30. Aug. 1946)

Die bekannte, von Dirac begründete These, daß die sogenannte Gravitationskonstante in Wirklichkeit im Laufe der kosmologischen Entwicklung veränderlich sei, macht eine grundsätzliche Erweiterung der Einsteinschen allgemein-relativistischen Gravitationstheorie erforderlich, derart, daß $\varkappa = 8\pi f/c^2$ als weitere, fünfzehnte *Feldgröße* neben den zehn Gravitationspotentialien g_{ik} und dem elektromagnetischen Viererpotential eingeführt wird. In einer früheren Arbeit[1] ist gezeigt worden, daß für diese Verallgemeinerung der bisherigen Theorie des Vakuumfeldes (mit Einschluß elektromagnetischer Felder) eine sehr natürliche Unterlage geboten wird durch die *fünfdimensionale* oder *projektive* Relativitätstheorie, wie sie aus Ideen von Kaluza hervorgegangen und später durch eine Reihe von Verfassern (Klein, Einstein, Mayer, Veblen, van Dantzig, Schouten, Pauli, Pais, Möller, Rosenfeld, Nörlund, Belinfante) weiter entwickelt ist[2]. Jedoch waren in der erwähnten früheren Arbeit die neuen *Feldgleichungen* des Vakuums noch nicht aufgestellt worden; hierauf bezieht sich die vorliegende Note. Nach Prüfung verschiedener Möglichkeiten sehen wir die *einfachste* in Betracht kommende Möglichkeit auch als die wahrscheinlichste an.

Die in der früheren Arbeit erhaltenen Ergebnisse, welche hier benutzt werden, erläutern wir so weit, daß die vorliegende Note auch ohne ihre Kenntnis verständlich sein wird; der Inhalt der früheren Mitteilung soll demnächst an anderer Stelle zugänglich gemacht werden.

Wir betrachten die vier Weltkoordinaten x^k (lateinische Indices stets = 1 bis 4) als Funktionen der *Verhältnisse* von fünf „*projektiven*“ Koordinaten X^μ (griechische Indices = 0 bis 4). Im Raume der X^μ analogisieren wir die Riemannsche Geometrie, jedoch mit dem Unterschied, daß wir nicht *Invarianz* gegen *alle* Koordinatentransformationen $X^\mu \to X'^\mu$ fordern, sondern nur gegen *homogene* Transformationen; schreiben wir $A_{|\mu}$ für die Ableitung von A nach X^μ, so ist also stets

$$X'^{\mu}{}_{|\nu} X^\nu = X'^\mu . \tag{1}$$

Die Gruppe G_5 der Transformationen (1) ist *isomorph* mit der Gruppe aller vierdimensionalen *Koordinaten- und Eichtransformationen*[3].

Die Komponenten des fünfdimensionalen metrischen Fundamentaltensors sollen homogene Funktionen (-2)-ten Grades sein:

$$g_{\mu\nu|\lambda}\, X^\lambda = -2\, g_{\mu\nu} . \tag{2}$$

Wegen (1) ist dann

$$J = g_{\mu\nu}\, X^\mu X^\nu \tag{3}$$

ein *Skalar*.

Der Übergang zur vierdimensionalen Darstellungsweise wird vermittelt durch die Ableitungen

$$x^k{}_{|\nu} = g^k_\nu , \tag{4}$$

mit denen wir den *vierdimensionalen* metrischen Fundamentaltensor definieren durch

$$g^{ik} = g^i_\mu\, g^k_\nu\, g^{\mu\nu} . \tag{5}$$

(Man muß *unterscheiden* $g_{\binom{5}{12}}$, die 12-Komponente von $g_{\nu\mu}$, und $g_{\binom{4}{12}}$, diejenige von g_{ik}). Man bekommt nämlich für das *Linienelement* die Formel

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}\, dX^\mu\, dX^\nu \\ &= g_{ik}\, dx^i\, dx^k + \frac{1}{J}(X_\mu\, dX^\mu)^2 , \end{aligned} \tag{6}$$

[1] P. Jordan, Physik. Z. 46 [1945] (Korrekturfahnen).

[2] Vergl. P. Pauli, Ann. Physik (5) 18, 305, 337 [1933]; A. Pais, Physica 8, 1137 [1941].

[3] P. Jordan, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl. 1945, 74.

so daß eine vierdimensionale Metrik g_{ik} in einfacher Weise durch die fünfdimensionale Metrik $g_{\mu\nu}$ mitgeliefert ist.

Die Angabe der 15 homogenen Funktionen $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ von 5 Koordinaten ist offenbar gleichwertig der Festlegung von 15 beliebigen Funktionen von 4 Koordinaten; wir haben es also zu tun mit einer Feldtheorie von 15 Feldgrößen. Sucht man, wie in der bisherigen Auffassung, nur 14 physikalische Feldgrößen g_{ik}, Φ_k geometrisch zu deuten, so muß man die betrachtete Theorie künstlich einschränken, und zwar durch die Nebenbedingung, daß der erwähnte Skalar $J = X_\mu X^\mu$ *konstant* sein soll. Läßt man dagegen diese zusätzliche Bedingung fallen, so gewinnt man zugleich mit einer grundsätzlich harmonischen Gestaltung der Theorie auch ihre Anpassung an die physikalische Vorstellung einer fünfzehnten Feldgröße $\varkappa$. Wir deuten J physikalisch als

$$J = 2\,\varkappa / c^2. \tag{7}$$

Als *elektromagnetische Feldstärke* $F_{kl} = -F_{lk}$ deuten wir den Tensor

$$F^{ik} = \frac{1}{J}\, g^i_\varrho\, g^k_\sigma (X_{\mu|\nu} - X_{\nu|\mu})\, g^{\mu\varrho}\, g^{\nu\sigma}\,, \tag{8}$$

von welchem gezeigt werden kann, daß er Rotation eines Viererpotentials ist.

Wir wollen den *verjüngten fünfdimensionalen Krümmungstensor* mit $R_{\mu\nu}$ bezeichnen, den *vierdimensionalen* mit G_{ik}. Dann wollen wir in Analogie zu den Einsteinschen Gleichungen $G_{ik} = 0$ des *reinen Gravitationsfeldes* (mit $\varkappa = \text{const.}$) folgende verallgemeinerte Feldgleichungen annehmen:

$$R_{\mu\nu} = 0\,. \tag{9}$$

Die in der früheren Note entwickelten Formeln lassen entnehmen, daß (9) gleichbedeutend ist mit folgenden 15 Feldgleichungen, in denen $A_{||k}$ die *kovariante* Ableitung nach x^k bezeichnen soll:

$$G_{ik} + \frac{\varkappa}{c^2} F^k_j\, F_{kl} = -\frac{1}{2\varkappa}\left(\varkappa_{||i||k} - \frac{\varkappa_{||i}\varkappa_{||k}}{2\varkappa}\right), \tag{10}$$

$$F^{jk}{}_{||j} = -\frac{3}{2}\,\varkappa_{||j} F^{jk}\,, \tag{11}$$

$$G = -\frac{\varkappa}{2c^2} F_{jk} F^{jk} - \frac{\varkappa_{||j}\varkappa_{||k}\, g^{jk}}{\varkappa} + \frac{\varkappa_{||j}\varkappa_{||k}\, g^{jk}}{2\varkappa^2}. \tag{12}$$

Das Verhältnis dieser neuen Feldgleichungen zu den bisherigen ist folgendes: Spezielle *exakte* Lösungen von (10), (11), (12) bekommt man, wenn man reine Gravitationsfelder (also $F_{kl} = 0$) mit *konstantem* $\varkappa$ so bestimmt, daß sie den alten Einsteinschen Feldgleichungen $G_{ik} = 0$ genügen. Bei Vorhandensein von elektromagnetischen Feldern ist dagegen stets mit einer gewissen Veränderlichkeit von $\varkappa$ zu rechnen, weil die Annahme $\varkappa = \text{const.}$ nach (10) und (12) zu $G = 0$ *und* $F_{kl} F^{kl} = 0$ führen würde. Jedoch sind unter allen normalen Verhältnissen die relativen Änderungen von $\varkappa$ so klein, daß man eine ausreichende Approximation erhält, wenn man (12) außer acht läßt und mit $\varkappa = \text{const.}$ die Gleichungen (10), (11) vereinfacht zu den klassischen Einstein-Maxwellschen Feldgleichungen des Vakuums:

$$G_{ik} + \frac{\varkappa}{c^2} F_i^{\cdot j}\; F_{kj} = 0\,, \tag{10'}$$

$$F^{jk}{}_{||j} = 0\,. \tag{11'}$$

Die die Ableitungen von $\varkappa$ enthaltenden Glieder der Gleichungen (10), (11), (12) bieten eine wichtige Stütze der kosmologischen Überlegungen, welche kürzlich vorgetragen wurden[4]. Bei einem mit konstanter Geschwindigkeit expandierenden Kosmos nehmen die Krümmung sowie die nicht verschwindenden Komponenten (Diagonal-Komponenten) umgekehrt zum Quadrat des Weltalters ab. Die übrigen Glieder in (10), (12) sind nun so beschaffen, daß sie es nahelegen, kosmologische Modelle zu suchen, bei welchen $\varkappa$ sich wie eine gewisse Potenz $t^{-\alpha}$ des Weltalters t verhält, während die elektromagnetische Strahlungsdichte bzw. die Diagonalkomponenten des Tensors $F_i^{\cdot j} F_{kj}$, sich wie $t^{\alpha-2}$ verhalten: denn dann werden die einzelnen Anteile in (10) übereinstimmend proportional mit

$$t^{-2} = t^{-\alpha}\, t^{\alpha-2} = t^{-\alpha-2}\, t^{\alpha} = t^{-2(\alpha+1)}\, t^{2\alpha}.$$

Daß genauer $\alpha = 1$ werden soll, kann natürlich nicht ohne Mitberücksichtigung der im Kosmos neben elektromagnetischer Strahlung vorhandenen *Materie* begründet werden. Daneben scheinen uns aber auch andere Werte α für die kosmologisch-astrophysikalischen Probleme eine gewisse Bedeutung zu haben; wir kommen darauf zurück.

[4] P. Jordan, Physik. Z. **45**, 183 [1944].